UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LA NATURALEZA SINGULAR DEL UNIVERSO
LOS TEOREMAS DE PENROSE Y RAYCHAUDHURI

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ EDUARDO NÚÑEZ ORTIZ

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. GABRIEL RUIZ HERNÁNDEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, MAYO DE 2018

La Naturaleza Singular del Universo
Los Teoremas de Penrose y Raychaudhuri

José Eduardo Núñez Ortiz

A mi padre

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN115017. Se agradece también la beca recibida por parte de DGAPA-UNAM sin la cual este proyecto no hubiera sido posible

Índice general

Introducción III

1. El Teorema de Raychaudhuri **1**
1.1. Geometría de Hipersuperficies Nulas 1
1.2. La Ecuación de Raychaudhuri 5

2. Causalidad **11**
2.1. Relaciones de Causalidad 11
2.2. Conjuntos No Cronológicos 15
2.3. Condiciones de Causalidad 17
2.4. Hipersuperficies de Cauchy 19

3. El Teorema de Penrose **21**
3.1. Superficies Atrapadas 21
3.2. Un Teorema de Singularidad 23

A. Cálculo de Variaciones **26**

Bibliografía **27**

Introducción

Así como la teoría general de la relatividad modela mejor el universo a gran escala, la geometría diferencial es el lenguaje más adecuado para desarrollar los principios de dicha teoría. Sin embargo, el lenguaje geométrico permite procesos que desde la interpretación de la física resultan incongruentes, tales como los viajes en el tiempo; por lo tanto, es necesario delimitar el lenguaje geométrico por emplear. Precisamente la *teoría causal*, echada a andar sobre la teoría general de la relatividad, permite elaborar los conceptos necesarios para delimitar el lenguaje geométrico y así desarrollar las condiciones que permiten modelar no sólo un universo plausible, sino uno que resulte genérico.

Esta tesina empieza por rescatar un resultado sorprendente, si se lo considera en su contexto, no sólo por ser el primer teorema de singularidades que apareció en la teoría, sino por su exposición en un lenguaje sencillo y genuinamente geométrico. Además, dicho resultado logró que futuras investigaciones se centraran en un aspecto de la teoría que resultó fundamental: las geodésicas nulas de una variedad lorentziana y su dominio de definición. En el capítulo primero de la tesina abordo este resultado, conocido como el teorema de Raychaudhuri, desde un lenguaje geométrico moderno con base en el trabajo de Gregory Galloway [1].

El capítulo segundo, basado principalmente en [7, cap. 14] y [2], desarrolla los conceptos básicos de la teoría causal para después poder construir las nociones y objetos necesarios que me permitirán plantear las hipótesis del teorema principal de esta tesina, el teorema de Penrose. Cabe mencionar que uno de los objetivos del segundo capítulo es observar cómo conceptos que no parecen muy geométricos en principio, resultan serlo, y que incluso llevan a condiciones topológicas bastante amables.

El último capítulo se centra exclusivamente en la demostración del teorema de Penrose. Si el segundo capítulo no terminaba por explicar todas las hipótesis de éste es porque faltaba una hipótesis geométrica para que el teorema fuera cierto. Esto me lleva a explorar el concepto de *superficie atrapada* antes de enunciar el teorema de Penrose, que resulta fundamental para lograr la demostración de uno de los teoremas de singularidades más famosos e impresionantes que se encuentran en geometría diferencial.

Por último quiero mencionar que la idea de producir esta tesina se originó en el curso de maestría Aspectos Matemáticos de la Teoría de la Relatividad impartido por Gabriel Ruiz en el Instituto de Matemáticas de la UNAM, así como en el curso Topology and General Relativity impartido por Gregory Galloway en la escuela de verano Between Geometry and Relativity del Erwin Shrödinger Institute durante el mes de julio de 2017.

Capítulo 1

El Teorema de Raychaudhuri

En abril de 1955 falleció Albert Einstein [9], uno de los científicos más influyentes tanto en la física como en la matemática. A pesar de no dedicarse de lleno a la geometría inspiró su desarrollo a tal grado que, a más de cien años de la publicación de su trabajo, la geometría lorentziana sigue siendo un área activa de la matemática actual. Dicha influencia cristalizó al mes siguiente de su fallecimiento en uno de los resultados más simples y extraordinarios de la geometría debido a Raychadhuri: el primer resultado de singularidades de la geometría lorentziana y, por supuesto, de la relatividad general.

El *teorema de Raychaudhuri*, cuya demostración es el objetivo de este capítulo, requiere de la construcción de ciertos objetos geométricos bien conocidos de la geometría de subvariedades, los cuales requerirán de especial atención por las condiciones del problema, ya que no se podrán construir de la manera usual debido al tipo de subvariedad en la que se trabajará.

1.1. Geometría de Hipersuperficies Nulas

En el espacio de Minkowski, $\mathbb{R}^n_1$, siempre se pueden encontrar subespacios vectoriales de dimensión mayor o igual a dos tales que la métrica de Lorentz se degenera al restringirla a ellos. En la clasificación causal de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n_1$ se da el nombre de tipo luz o nulos a esta clase de subespacios. Esto equivale a decir que un subespacio nulo de $\mathbb{R}^n_1$ es aquél en el que existe un vector distinto de cero ortogonal a todos los vectores del subespacio.

Un subespacio nulo de $\mathbb{R}^n_1$ será el modelo de lo que definiré como una hipersuperficie nula, así como un subespacio tipo tiempo es modelo de una subvariedad temporal en una variedad lorentziana arbitraria M, y de igual forma para las subvariedades tipo espacio.

Definición 1.1. Una hipersuperficie nula N es una subvariedad de codimensión 1 de una variedad Lorentziana M^{n+1} con $n \geq 2$, tal que para todo p en N el espacio tangente T_pN es nulo como subespacio de T_pM.

Esto quiere decir que en cada punto de una hipersuperficie nula, el espacio normal al tangente, $T_p^{\perp}N$, queda contenido en T_pN. Aún más, en cada p de

N debe existir una dirección tal que, si K_p es un vector que apunta en dicha dirección, se tendrá que $\langle K, X\rangle_p = 0$ para todo vector X en el espacio tangente T_pN. Esto es consecuencia directa de la causalidad de un espacio vectorial con una métrica de Lorentz.

La definición 1.1 se puede entender en términos de la métrica g de M, afirmando que una hipersuperficie nula N de M es una subvariedad de codimensión 1 donde la métrica g se degenera al restringirla a N. Esto implica que la dimensión del núcleo de g en T_pN es diferente de cero para toda p en N y, aún más, como se puede ver en [7, p. 53] y [6, cap. 1], el índice de g me asegura que la dimensión de dicho núcleo será 1 en todo espacio tangente a M.

Lema 1.2. Siempre existe un campo vectorial C^∞ sobre toda hipersuperficie nula N, de tal forma que dicho campo K no tiene ceros y para cada p en M, K_p es nulo. Cuando K se encuentre orientado al futuro se dirá que es el campo característico de N.

La suavidad de K está dada por la métrica, ya que el hecho de que en cada p en N el campo K induzca la función cero está determinado por los coeficientes de la métrica restringida $\tilde{g}$.

El campo característico de N resulta ser único salvo multiplicación por una función positiva, esto último para preservar la orientación al futuro del campo. Además, las curvas integrales del campo K resultan ser una congruencia bastante útil para el desarrollo de esta tesina; dichas curvas son conocidas como los *generadores nulos* de N.

Proposición 1.3. Las curvas integrales del campo característico K de N son pregeodésicas; es decir, existe un cambio de parámetro que convierte a las curvas integrales de K en geodésicas nulas.

Demostración. Basta con demostrar que $\nabla_K K = \lambda K$, donde ∇ es la conexión del ambiente y $\lambda \in C^\infty(M)$. Esto, por la degeneración de la métrica en TN, es equivalente a mostrar que para todo $X \in T_pS$ se cumple que $\langle \nabla_K K, X\rangle = 0$, y esto para cada $p \in N$.

Sea $X \in T_pN$; este vector se puede extender localmente a lo largo de una curva integral de K en la topología de N pidiendo que $\pounds_K X = [K, X] = 0$ y, de ahí, extenderlo a un abierto de N para después ampliarlo a un abierto de M.

Siendo así, X permanecerá tangente a N, de tal forma que $\langle K, X\rangle = 0$ y, derivando este producto en la dirección de K se obtiene que:

$$\langle \nabla_K K, X\rangle = -\langle K, \nabla_K X\rangle \ .$$

La condición que se pidió a la extensión del campo X implica a su vez que $\nabla_K X = \nabla_X K$. Así:

$$\langle \nabla_K K, X\rangle = -\langle K, \nabla_X K\rangle = -\frac{1}{2} X\langle K, K\rangle = 0 \ ,$$

para todo $p \in N$. Por lo tanto $\nabla_K K = \lambda K$.

□

Al ser N una hipersuperficie uno se puede preguntar cómo se ve N desde el punto de vista de M y si esa descripción guardará alguna semejanza con las técnicas usadas en el caso de que la hipersuperficie no sea nula. La respuesta,

como se mostrará, es que es posible hacer una descripción muy similar a la que se tiene cuando la métrica de N no sea degenerada y, al igual que en los otros casos, se usará un campo normal a N para hacer tal descripción. Claramente, el campo normal obvio por usar será K mismo, a pesar de que, por la degeneración de la métrica en N, sea también tangente. Esto me obliga a quitar del camino a K de alguna forma y, como la dirección de K es la que degenera la métrica, resultará mas sencillo trabajar en el espacio cociente dado por la siguiente relación de equivalencia.

Definición 1.4. Dos vectores X y X' en T_pN están relacionados si y sólo si

$$X - X' \in \langle K \rangle \ ;$$

donde $\langle K \rangle$ es el subespacio generado por K. Así, en cada punto se trabajará en el espacio cociente $\frac{T_pN}{K}$, para toda $p \in N$, y se define el haz cociente como:

$$\frac{TN}{K} := \bigcup_{p \in N} \frac{T_pN}{K} \ .$$

Es necesario dotar de una métrica a este espacio cociente si se desea hacer geometría, pero no puede ser cualquier métrica si lo que se busca es seguir considerando a N como subvariedad de M.

Definición 1.5. Se define la métrica h_p en $\frac{T_pN}{K}$ como:

$$h_p\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = \langle X, Y \rangle \ ;$$

donde $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son las clases de equivalencia de X y Y respectivamente en T_pN, bajo la relación de equivalencia dada en la definición 1.4.

Si X y Z son dos vectores en la misma clase de equivalencia, se obtiene lo siguiente:

$$\langle X, Y \rangle - \langle Z, Y \rangle = \langle X - Z, Y \rangle = \langle \lambda K, Y \rangle = 0 \ ;$$

Esto quiere decir que la métrica h_p está bien definida; además es positiva definida ya que si $h(\overline{X}, \overline{X}) = 0$, por definición de la métrica $\overline{X} = \overline{K}$, ya que sólo los múltiplos de K tienen norma cero.

Con esto se ha eliminado la dirección en T_pN que degenera la métrica, y se ha obtenido una métrica positiva definida que guarda aún la información geométrica de N como subespacio de M, a través de la cual podré definir los operadores geométricos usuales.

Definición 1.6. El operador de forma nulo respecto de K se define sobre el espacio cociente como:

$$S_K(\overline{X}) := \overline{\nabla_X K} \ .$$

Así como la degeneración de la métrica en N no me permite usar la fórmula de Gauss para separar la geometría de N de la de M, tampoco me permite usar la fórmula de Weingarten para definir el operador de forma usual. Sin embargo, se puede construir un operador de forma similar en el espacio cociente, como se ha visto en la pasada definición.

La definición 1.6, sin embargo, carece de un signo menos en comparación con su habitual exposición en el caso no degenerado; esto es deliberado, ya que

así la *curvatura media nula* coincidirá con la divergencia del campo K y, como se verá más adelante, con los *coeficientes de expansión nulos* que jugarán un papel muy importante al final de este trabajo.

Como el campo característico es nulo, se tiene que $\nabla_X K$ es ortogonal a K, implicando que $\nabla_X K$ es un vector en T_pN. La naturaleza lineal de la conexión en X, junto con la proposición 1.3, tiene por consecuencia que el operador de forma nulo esté bien definido y, por la misma razón, S_K será $C^\infty(N)$-lineal.

Si $f \in C^\infty(N)$ es una función positiva, se puede escalar el campo K de tal forma que se obtenga un nuevo campo $\tilde{K} = fK$. Así:

$$\nabla_X \tilde{K} = (Xf)K + f\nabla_X K \ ;$$

resultando que $\nabla_X \tilde{K}$ y $\nabla_X K$ se encuentran en la misma clase de equivalencia en $\frac{T_pN}{K}$. Por lo tanto, el valor de S_K es único salvo un factor escalar positivo y depende sólo de los valores de K y X en p.

Definición 1.7. Se define la segunda forma fundamental nula II_K en el espacio cociente como:

$$II_K\left(\overline{X},\overline{Y}\right) = h_p\left(S_K\left(\overline{X}\right),\overline{Y}\right) = \langle \nabla_X K, Y\rangle \ .$$

Claramente la segunda forma fundamental nula II_K está bien definida. Además, si X y Y están en T_pN, entonces $[X,Y]$ es tangente a N y:

$$\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, K\rangle = \langle [X,Y], K\rangle = 0 \ .$$

También se tiene que:

$$\begin{aligned} X\langle Y,K\rangle &= \langle \nabla_X Y, K\rangle + \langle Y, \nabla_X K\rangle = 0 \ , \\ Y\langle X,K\rangle &= \langle \nabla_Y X, K\rangle + \langle X, \nabla_Y K\rangle = 0 \ . \end{aligned}$$

Que implican junto con la tangencia de $[X,Y]$ que:

$$\langle \nabla_X K, Y\rangle = \langle \nabla_Y K, X\rangle \ .$$

Por lo tanto, el operador de forma es autoadjunto respecto del producto h, y la segunda forma fundamental II_K resulta ser un operador simétrico, de la misma forma que sucedía ya en el caso no degenerado.

Tomando K en T_pN, cualquier base $\{K, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}\}$ de T_pN cumplirá con que el espacio generado por los vectores $\{\beta_1 \cdots, \beta_{n-1}\}$ es tipo espacio, de tal forma que esta base genera un conjunto ortonormal en el espacio cociente. Considerando dicho conjunto ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ se puede definir la *curvatura media nula* de N.

Definición 1.8. La curvatura media nula θ de N se define como la traza de la segunda forma fundamental nula II_K.

$$\theta := \text{tr } II_K = \sum_{i=1}^{n-1} h\left(S_K\left(\overline{e}_i\right),\overline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} K, e_i\rangle \ . \tag{1.1}$$

El último término en la ecuación (1.3) es la expresión de la divergencia del campo característico K, pero no desde el punto de vista de N. Si se piensa en

una hipersuperficie de M cuya intersección con N alrededor de algún punto p sea transversal, el resultado debe ser una hipersuperficie Σ tipo espacio de N y de dimensión $n-1$. Si $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ es una base ortonormal de $T_p\Sigma$, ésta induce la base $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ en el espacio cociente con la cual se definió la curvatura media nula de S. Entonces:

$$\theta = \mathrm{div}_\Sigma K \ ; \tag{1.2}$$

es decir, θ mide la divergencia del campo K respecto de la subvariedad Σ.

Ejemplo 1.9. El cono de luz pasado $\Lambda^-(0)$ en $\mathbb{R}^n_1$ tiene curvatura media nula $\theta < 0$.

El cono de luz $\Lambda^-(0)$ en el espacio de Minkowski es el conjunto de todos los vectores nulos de $\mathbb{R}^n_1$ representados en el origen y es una hipersuperficie nula. Si se hace la intersección de $\Lambda^-(0)$ con un plano $t = c$, donde c es una constante negativa, se obtiene una sección del cono que en la construcción que se ha hecho representa la variedad Σ respecto de la cual se calculará la divergencia de K. Siendo así, si p es un punto del cono de luz pasado $t = -\sqrt{x^2+y^2}$, su campo característico se puede expresar localmente como $K(p) = (1, -x, -\sqrt{1-x^2})$, mientras que el vector tangente unitario a Σ se puede expresar como $v(p) = (0, -\sqrt{1-x^2}, x)$. Al operar con la conexión usual de $\mathbb{R}^3_1$ se obtiene lo siguiente:

$$\theta(p) = \langle \nabla_v K, v \rangle = \mathrm{div}_\Sigma K = -1 \ .$$

Esto quiere decir que el campo característico de $\Lambda^-(0)$ tiene un pozo, lo que hace que las curvas integrales de K se acumulen en un punto que, en este caso, es la intersección de las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. De manera similar se puede demostrar que la curvatura media nula de $\Lambda^+(0)$ debe ser positiva e igual a 1.

El *teorema de Raychaudhuri*, que demostraré más adelante, se puede pensar como un teorema de volumen en el sentido siguiente. Si se deja fluir la sección Σ del ejemplo anterior en la dirección de K se podrá notar que su longitud, en general volumen, decrece y se aproxima a cero. Esto refuerza aún más el sentido geométrico de resultado por exponer al final de este capítulo.

Por último, como $S_K\left(\overline{X}\right)$ depende sólo del valor de K y $\overline{X}$ en un punto, salvo escalamiento por una función positiva, se tiene que las condiciones $\theta > 0$ y $\theta < 0$ son invariantes ante tales escalamientos.

1.2. La Ecuación de Raychaudhuri

Por la proposición 1.3 se tiene que las curvas integrales del campo característico son pregeodésicas y, como tales, existe un cambio de parámetro a otro afín que convierte a la curvas en geodésicas de M, ya que la conexión que se usa es la del espacio ambiente.

Sea $\eta : (a, b) \to M$ una curva geodésica nula generadora de N, entonces $\eta'(s) = K$ es un campo característico de N y el operador de forma en términos de η actúa en en el cociente $\frac{T_pN}{\eta'(s)}$ como $S_{\eta'(s)}\left(\overline{X}\right) = \overline{\nabla_X \eta'}$.

Cuando se tiene un campo $X(s)$ restringido a un generador nulo $\eta(s)$ se adopta la notación X' para el vector $\nabla_{\eta'} X$; con esto, se puede pensar en una nueva conexión que actúe sobre el haz cociente para justificar la identidad $\overline{X}' =$

$\overline{X'}$, o simplemente tomarla como una definición. En fin, con la pasada identidad se recupera la propiedad:

$$S'_{\eta'}\left(\overline{X}\right) = S_{\eta'}(\overline{X})' - S_{\eta'}(\overline{X}') \ ;$$

para derivación de tensores.

Proposición 1.10. El operador de forma nulo restringido a una geodésica nula generadora de N cumple con una ecuación de Ricatti.

$$S' + S^2 + \mathcal{R} = 0 \ ; \tag{1.3}$$

donde $\mathcal{R}$ es la transformación:

$$\mathcal{R}(\overline{X}) := \overline{R(X, \eta'(t))\eta'(t)} \ ;$$

y R es el tensor de Riemann en M.

Demostración. Antes de empezar con la prueba me permitiré hacer una observación. Si $p = \eta(s_0) \in N$ para alguna $s_0 \in (a, b)$ y $U \subset N$ es un abierto alrededor de p donde el campo característico K cumple con la ecuación geodésica $\nabla_K K = 0$, restringiendo K a la geodésica η se obtendrá que $K_{\eta(s)} = \eta'(s)$.

Al tomar un vector $X \in T_pN$, éste se puede extender a un abierto de N con la condición $[X, K] = \nabla_X K - \nabla_K X = 0$. Este abierto no tiene porqué ser necesariamente U pero siempre se puede tomar la intersección para evitar cualquier problema. Entonces, en dicho abierto que seguiré llamando U se tiene:

$$R(X, K)K = \nabla_X \nabla_K K - \nabla_K \nabla_X K - \nabla_{[X,K]} K = -\nabla_K \nabla_X K = -\nabla_K \nabla_K X \ .$$

Por lo tanto se tiene, en una notación más corta, que $R(X, K)K = -X''$ y, considerando que el vector X se extendió usando la condición $\nabla_X K = \nabla_K X$, se obtiene:

$$\begin{aligned} S'(\overline{X}) &= S(\overline{X})' - S(\overline{X}') \ , \\ &= \overline{\nabla_K X}' - S(\overline{\nabla_X K}') \ , \\ &= \overline{X}'' - S(S(\overline{X})) \ , \\ &= -\overline{R(X, K)K} - S^2(\overline{X}) \ . \end{aligned}$$

Si se restringe K al generador nulo η se obtiene finalmente la ecuación de Ricatti buscada.

□

Esto quiere decir que para todo p en N el operador de forma obedece localmente a una ecuación de Ricatti, y es de suma importancia que así sea ya que esta propiedad de S_K es vital para obtener la *ecuación de Raychaudhuri*. Al definir θ' como la traza de S_K y desarrollando la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta' &= \text{tr } S'_K = \sum_{j=1}^{n-1} h(S'_K(\overline{e}_j), \overline{e}_j) \ , \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} h(S_K(\overline{e}_j)', \overline{e}_j) - h(S_K(\overline{e}'_j), \overline{e}_j) \ , \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} h(\nabla_K S(\overline{e}_j), \overline{e}_j) - h(S(\overline{\nabla_K e_j}), \overline{e}_j) \ . \end{aligned}$$

Como se dijo antes, el conjunto ortonormal $\{e_j\}_{j=1}^{n-1}$ de T_pN genera el espacio tangente en p de una sección espacial Σ de N que contiene a p, localmente. Si se extiende dicha base de $T_p\Sigma$ a un marco ortonormal $\{E_j\}_{j=1}^{n+1}$ de M adaptado a Σ, donde $\{E_j\}_{j=1}^{n-1} \subset T\Sigma$, tal que $\nabla_{E_i} E_j = 0$ para $i, j \leq n-1$ se obtendrá:

$$\begin{aligned} \theta' &= \sum_{j=1}^{n-1} h(\nabla_K S(\overline{E}_j), \overline{E}_j) - h(S(\overline{\nabla_K E_j}), \overline{E}_j) \ , \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} K \cdot h(S_K(\overline{E}_j), \overline{E}_j) = K \cdot \theta \end{aligned}$$

Cuando $K = \eta'$, el cálculo anterior justifica la siguiente ecuación.

$$\theta' = K \cdot \theta = \frac{d\theta}{dt}. \tag{1.4}$$

Por otro lado, todo operador lineal se puede descomponer en la suma de tres operadores donde uno solo tiene la traza, mientras que los otros dos son la parte simétrica y antisimétrica sin traza. En el caso que me atiene tal descomposición la aplicaré al operador de forma.

Llamando S a la parte simétrica de S_k, A a su parte antisimétrica e I a la identidad, se tiene la descomposición:

$$S_K = \tilde{\theta} + \tilde{\sigma} + \tilde{\omega} \ ;$$

donde:

$$\tilde{\theta} = \tfrac{\theta}{n-1} I \ \ ; \ \ \tilde{\sigma} = S - \tfrac{\theta}{n-1} I \ \ ; \ \ \tilde{\omega} = A.$$

Como la segunda forma fundamental nula es simétrica, el operador A debe ser cero, haciendo que $\tilde{\omega}$ sea cero también y $S = S_K$. Entonces $S_K = \tilde{\theta} + \tilde{\sigma}$ y:

$$S_K^2 = \tilde{\theta}^2 + \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\theta}\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}\tilde{\theta} \ . \tag{1.5}$$

Por lo tanto, la traza de S_K^2 será la suma de las trazas de los operadores en (1.5). La traza de los últimos dos términos de la suma en (1.5) es cero como muestra el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\tilde{\theta}\tilde{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{n-1} h(\tilde{\theta}\tilde{\sigma}(\overline{e}_j), \overline{e}_j) \ , \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} h\left(\left(\frac{\theta}{n-1} I\right)\left(S_K - \frac{\theta}{n-1} I\right)(\overline{e}_j), \overline{e_j}\right) \ , \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} h\left(\left(\frac{\theta}{n-1} S_K - \frac{\theta^2}{(n-1)^2} I\right)(\overline{e}_j), \overline{e}_j\right) \ , \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\theta}{n-1} h(S_K(\overline{e}_j), \overline{e}_j) - \frac{\theta^2}{(n-1)^2} h(\overline{e}_j, \overline{e}_j) = 0 \ ; \end{aligned}$$

y de manera similar se obtiene que $\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}\tilde{\theta}) = 0$. Como $\tilde{\theta}$ es un múltiplo de la identidad, debe ser claro que $\mathrm{tr}\ \tilde{\theta}^2 = \frac{\theta^2}{n-1}$, así que sólo falta calcular la traza de

$\tilde{\sigma}^2$ para obtener la traza de S_K^2, aunque no será necesario calcular dicha traza explícitamente.

Usando por un momento la notación de Einstein y siendo $\overline{e}_j$ un elemento de la base del espacio cociente, se tiene que $\tilde{\sigma}(\overline{e}_j) = \tilde{\sigma}_j^i \overline{e}_i$, y con esto $\tilde{\sigma}^2(\overline{e}_j) = \tilde{\sigma}_j^i \tilde{\sigma}_i^k \overline{e}_k$, donde los símbolos $\tilde{\sigma}_j^i$ son las coeficientes de la matriz que representa a $\tilde{\sigma}^2$ en la base $\{\overline{e}_j\}$. Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{n-1} h(\tilde{\sigma}^2(\overline{e}_j), \overline{e}_j) = \sum_{i,j}^{n-1} \sigma_j^i \sigma_i^j \ .$$

Como $\tilde{\sigma}$ es un operador simétrico, el último término de la ecuación anterior es una suma de cuadrados y así, la traza de este operador es mayor que cero. Esto justifica la definición del *coeficiente de corte* como $\sigma^2 := \mathrm{tr}\tilde{\sigma}$.

Entonces, la traza de la ecuación (1.3) es:

$$\theta' = -\mathrm{Ric}(K, K) - \sigma^2 - \frac{\theta^2}{n-1} \ ;$$

de tal forma que, si $K = \eta'$, usando la ecuación (1.4) se obtiene:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\mathrm{Ric}(\eta', \eta') - \sigma^2 - \frac{\theta^2}{n-1} \ . \tag{1.6}$$

Esta es la ecuación de Raychaudhuri en el caso de una congruencia de geodésicas nulas que no rotan. La ecuación (1.6) permite ver que la variación de la curvatura media nula respecto de un parámetro afín se ve afectada por la curvatura de Ricci de la variedad ambiente, mostrando que la geometría de N depende en gran medida de la geometría de M y del tensor de energía-momento, que determina la geometría de M vía la ecuación de Einstein.

Teorema de Raychaudhuri. Sea M una variedad lorentziana que obedece la *condición nula de energía,* y N una hipersuperficie nula de M. Si los generadores nulos de N son geodésicamente completos al futuro, entonces N tendrá curvatura media nula no negativa.

Este teorema es considerado un resultado de singularidades en el sentido de que, si N es una hipersuperficie nula de M tal que su curvatura media nula es menor que cero, entonces las geodésicas que generan a N son incompletas al futuro. Más que un resultado sobre las geodésicas de M, el teorema de Raychaudhuri habla de sus hipersuperficies nulas y bajo qué condiciones éstas se encuentran bien definidas hacia el futuro.

La *condición nula de energía* en relatividad general es una de tantas condiciones que se llegan a pedir para modelar un espacio-tiempo plausible o genérico, físicamente hablando, respecto de las observaciones que se tienen. La condición que se menciona en el teorema de Raychaudhuri se da sobre el tensor de energía-momento como:

$$T(X, X) \geq 0 \ ;$$

donde X es cualquier vector nulo en M. Una interpretación común de esta condición es que el campo gravitatorio es localmente atractivo en la dirección X de un rayo de luz; geométricamente hablando, la condición nula de energía dice

que las congruencias geodésicas nulas no divergen localmente, pero esto último se lee del tensor de Ricci usando la ecuación de Einstein:

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 8\pi T \ .$$

En este caso se puede prescindir de la constante cosmológica ya que la condición nula de energía requiere de vectores nulos. Así:

$$\mathrm{Ric}(X,X) - \frac{1}{2}Rg(X,X) = \mathrm{Ric}(X,X) = 8\pi T(X,X) \geq 0 \ .$$

Por lo tanto, la condición nula de energía se transforma en una condición geométrica tal que, para todo vector nulo X en M, se tiene $\mathrm{Ric}(X,X) \geq 0$.

Demostración. Supóngase que $\theta(p) < 0$ para algún p en N y sea η un generador nulo con dirección al futuro de N, tal que $p = \eta(0)$. Si se escala el campo característico de N de tal forma que $K = \eta'(s)$ alrededor de p, como el signo de la curvatura media nula es invariante ante tales escalamientos, se tendrá que $\theta(s) < 0$ en una vecindad de p.

Una consecuencia directa de la condición nula de energía es que el término en el lado derecho de la ecuación (1.6) es menor que cero. Entonces:

$$\frac{d\theta}{ds} \leq -\frac{\theta^2}{n-1} < 0 \ .$$

Esto implica que θ es estrictamente decreciente, es decir, que para toda $s > 0$, la curvatura θ es negativa. Localmente $\theta \neq 0$, así que se puede dividir la pasada desigualdad entre θ^2 y obtener:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\theta}\right) \geq \frac{1}{n-1} \ . \tag{1.7}$$

Por lo tanto la función θ^{-1} es creciente y menor que cero, es decir, se encuentra acotada, es creciente y converge a cero a la vez que θ diverge. Integrando la ecuación (1.7) de cero a un parámetro afín finito s_0 se obtiene la desigualdad:

$$0 > \frac{1}{\theta(s_0)} \ \geq \ \frac{1}{\theta(0)} + \frac{s_0}{n-1} \ . \tag{1.8}$$

La desigualdad (1.8) hace evidente que para un parámetro afín finito $s_0 = -\frac{n-1}{\theta(0)}$ la curvatura media nula en s_0 no está determinada, contraviniendo la estructura C^∞ de N.

□

Como se pudo observar en el ejemplo 1.9, los generadores nulos de $\Lambda^-(0)$ tienen un punto *focal* en el origen de las coordenadas rectangulares de $\mathbb{R}^3_1$; sin embargo, los generadores nulos como geodésicas nulas del ambiente no se detienen ahí, al contrario, se siguen al futuro y no paran ya que el espacio de Minkowski es geodésicamente completo. Esto quiere decir que, si $\theta < 0$ en algún punto de una hipersuperficie nula N, el teorema de Raychaudhuri no asegura que los generadores nulos de N sean incompletos como geodésicas nulas del ambiente, haciendo que la singularidad aparezca en la estructura C^∞ de N.

Recordemos que θ se calcula como la divergencia de K respecto de una sección tipo espacio Σ de N, este resultado implica que bajo ciertas hipótesis el volumen de Σ llevado a lo largo del flujo de K decrece si θ es negativa en algún punto.

Para lograr un resultado de singularidad geodésica del ambiente, como en el *teorema de Penrose*, es necesario investigar la dinámica impuesta por la causalidad de las curvas y encontrar en ese lenguaje las hipótesis necesarias para poder mostrar un resultado de mayor alcance y profundidad.

Capítulo 2

Causalidad

La elaboración de la teoría causal, construida a partir de las ideas de Roger Penrose, surge de la necesidad de modelar un espacio-tiempo genérico y de eliminar modelos con propiedades geométricas que no se consideran causales, desde el punto de vista de la física.

Dado que la teoría de la relatividad general considera la velocidad de la luz como un límite de nuestra experiencia, en el sentido de que no nos relacionamos causalmente con ningún evento en el universo que no podamos "observar", las curvas nulas representarán dicho límite. La teoría causal se centra en las condiciones, determinadas por las curvas nulas y temporales, que debe seguir todo espacio-tiempo con el objetivo de mostrar que, dadas las condiciones adecuadas, todo espacio-tiempo es irremediablemente singular.

En esta teoría, parte de las consecuencias inmediatas son resultados que se obtienen de variar geodésicas nulas sobre variedades espaciales, noción que me llevará a preguntarme de manera natural sobre la existencia de puntos *focales* en alguna variación geodésica. Otra tema de importancia en la teoría causal es la construcción de una función distancia que, por la naturaleza lorentziana del contexto, fallará en ser una métrica analítica; a pesar de esto último, la construcción de una distancia lorentziana es de vital importancia para el desarrollo de la teoría causal, aunque en este trabajo en particular no se mostrará demasiado interés por ella.

Una variedad lorentziana con más de una componente conexa no es de interés para la teoría causal, ya que será imposible relacionar causalmente puntos en diferentes componentes conexas. Por esta razón se supondrá siempre que la variedad lorentziana M en cuestión es conexa, a no ser que se reconozca lo contrario.

2.1. Relaciones de Causalidad

Las *relaciones de causalidad* en una variedad lorentziana son fundamentales para saber cómo distintos puntos en ella se pueden encontrar conectados causalmente, y así empezar a modelar un espacio-tiempo. Cabe recordar que una curva causal es aquélla cuyos vectores tangentes no son tipo espacio.

Definición 2.1. Sea M una variedad lorentziana orientada temporalmente y $p, q \in M$. Las relaciones de causalidad en M se definen como sigue:

1. $p \ll q$ si existe una curva tipo tiempo en M, orientada al futuro, de p a q

2. $p < q$ si existe una curva causal en M, orientada al futuro, de p a q

De la definición se sigue que, si $p \ll q$, entonces $p < q$. Además, se dice que una curva suave por trozos es causal o temporal si es causal o tipo tiempo en cada trozo de la curva y en el punto donde se parte la curva, los vectores tangentes de cada trozo en el punto en cuestión se mantienen en el mismo cono causal o temporal, según sea el caso. Dicho de otra forma, si en t_i, en el intervalo de definición de la curva α ésta deja de ser C^∞, se pide que $\langle \alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+) \rangle < 0$; donde $\alpha'(t_i^+)$ es el vector tangente asociado a la curva $\alpha_{|[t_i, t_{i+1}]}$, mientras que $\alpha'(t_i^-)$ es el vector tangente asociado al trozo de la curva con parámetro en $[t_{i-1}, t_i]$.

A partir de estas relaciones se define otra que será aún más útil, la relación $p \leq q$, que implica $p < q$ ó $p = q$. Por lo dicho con anterioridad, queda claro que las relaciones $\ll$ y $\leq$ en este contexto son transitivas.

Haciendo uso de la proposición A.4 se obtiene en consecuencia el siguiente corolario.

Corolario 2.2. Si $p \ll r$ y $r \leq q$, se tendrá que $p \ll q$.

En este caso no importa el orden en que se den las relaciones en el corolario, se puede tener que $p \leq r$ y $r \ll q$ y obtener el mismo resultado.

Definición 2.3. Se define el futuro cronológico de p en M como:

$$I^+(p) = \{q \in M \mid p \ll q\} \ .$$

Y se define el futuro causal de p en M como:

$$J^+(p) = \{q \in M \mid p \leq q\} \ .$$

Con esta definición se puede rescribir la transitividad de las relaciones de causalidad como $I^+(q) \subset I^+(p)$, para toda q en el futuro cronológico de p, y de forma similar para los elementos q del futuro causal de p se tiene $J^+(q) \subset J^+(p)$.

Si A es cualquier subconjunto de M se puede definir el futuro cronológico de A y su futuro causal como la unión de los futuros cronológicos y causales, respectivamente, de todos los puntos en A.

$$\begin{aligned} I^+(A) &= \bigcup_{p \in A} I^+(p) \\ J^+(A) &= \bigcup_{p \in A} J^+(p) \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede definir tanto el *pasado cronológico* como el *pasado causal* de p en M tomando en cuenta ahora los puntos $q \in M$ tales que cumplan las relaciones $q \ll p$ o $q \leq p$ respectivamente, y de igual manera definir $I^-(A)$ y $J^-(A)$ para algún subconjunto A de M.

Siendo A un subconjunto arbitrario de una variedad lorentziana M y tomando q en $I^+(A)$, existe una curva temporal que va de algún punto en A a q; suponiendo que el intervalo de definición de dicha curva es el $[0, 1]$, para la imagen de cualquier parámetro $0 < t < 1$ se puede decir que existe una curva temporal que

lo une con q. Como la relación $\ll$ es transitiva se tiene que $I^+(A) = I^+(I^+(A))$. Similarmente, para el futuro causal de A y por la transitividad de $\leq$ se tiene a su vez que $J^+(A) = J^+(J^+(A))$. Tomando las mismas ideas y añadiendo ahora el hecho de que $\ll$ implica $\leq$ se tiene $I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A))$. El corolario 2.2 implica $I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A))$. Para recordar todo lo dicho hasta ahora a propósito de las relaciones causales definidas, se puede resumir que:

$$I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subset J^+(J^+(A)) = J^+(A) \ .$$

En el espacio de Minkowski, $\mathbb{R}^n_1$, es fácil identificar a estos subconjuntos ya que $I^+(p)$ no es más que el cono temporal superior con vértice en p y $J^+(p)$ es la unión de $I^+(p)$ con p y el cono de luz con vértice en p. Además, el subconjunto $I^+(p)$ es abierto dada la continuidad de la métrica de Lorentz, mientras que $J^+(p)$ es su cerradura. Esto implica que en el espacio tangente T_pM estos conjuntos también serán abiertos y cerrados respectivamente, aunque en una variedad lorentziana M arbitraria no sucederá exactamente de la misma manera, al menos no globalmente.

Si q está en $J^+(p) \subset \mathbb{R}^n_1$, por definición existe una curva causal α orientada al futuro tal que, sin pérdida de generalidad, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Si α no se *quiebra* en su dominio, es decir, es continua en $[0,1]$ y suave en $(0,1)$ existe t_0 en el intervalo abierto tal que $\alpha'(t_0)$ es paralelo al vector que va de p a q, el cual denotaré como $\overrightarrow{pq}$. Entonces el vector $\overrightarrow{pq}$ es causal. Tomando ahora la recta γ que va de p a q con parámetro afín tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$ se tiene que $\gamma'(0) = \overrightarrow{pq}$. Por lo tanto, como la causalidad de una geodésica es invariante, se tiene que si q está en $J^+(p)$ la geodésica que los une es causal, y de manera similar sucederá para el futuro cronológico.

Esto último es conveniente tenerlo en cuenta ya que existen argumentos fuertes para equiparar la causalidad del espacio tangente con la causalidad en un abierto alrededor de p en M, para lo cual es necesario tener alguna noción de *convexidad* en M.

Definición 2.4. Un conjunto abierto convexo $\mathcal{C}$, en M, es aquél que es una vecindad normal para cada uno de sus elementos. Esto hace que exista una única geodésica γ completamente contenida en $\mathcal{C}$ que una a cualesquiera dos puntos del convexo.

La existencia de tales abiertos convexos se puede consultar en [7, p. 130]. Si p y q son dos puntos en el abierto convexo $\mathcal{C}$, existe una geodésica γ en M tal que $p = \gamma(0)$ y $q = \gamma(1)$; con esto se define el *vector de desplazamiento* $\overrightarrow{pq} := \gamma'(0)$. Además, siendo $\mathcal{U}$ un abierto de M, éste es una subvariedad de igual dimensión y causalidad que M y tendrá también sus propias relaciones causales cuyos futuros cronológicos y causales se denotarán $I^+(p,\mathcal{U})$ y $J^+(p,\mathcal{U})$, respectivamente.

Lema 2.5. Sea $p \neq q$ ambos en un convexo abierto $\mathcal{C}$ de M. Entonces, q en $J^+(p,\mathcal{C})$ si y sólo si $\overrightarrow{pq}$ es causal orientado al futuro.

Demostración. Si $\overrightarrow{pq}$ es causal orientado al futuro se tiene que la geodésica que une a p con q es causal y por lo tanto $q \in J^+(p,\mathcal{C})$.

Sea ahora q en $J^+(p,\mathcal{C})$. La transformación exponencial es un difeomorfismo en $\mathcal{C}$ que manda $0 \in T_pM$ a p. Si q es la imagen de $\tilde{q}$ y la curva causal α que va de p a q es la imagen de una curva $\tilde{\alpha}$ en el espacio tangente bajo la transformación exponencial, $\tilde{\alpha}$ se mantendrá dentro de un cono causal de T_pM [7, p. 146], que

será $J^+(0)$ ya que la curva está orientada al futuro. Por lo tanto $\tilde{q} \in J^+(0)$ y el vector que va de 0 a $\tilde{q}$ en $\tilde{\mathcal{C}} \subset T_pM$ es causal al igual que $\overrightarrow{p\tilde{q}}$; es más, coinciden. □

El mismo resultado es válido para el futuro cronológico de un punto p en $\mathcal{C}$, si se pide ahora que $\overrightarrow{p\tilde{q}}$ sea tipo tiempo y orientado al futuro.

Lema 2.6. $I^+(p, \mathcal{C})$ es abierto en M y $J^+(p, \mathcal{C})$ es su cerradura en $\mathcal{C}$.

Demostración. Si $\tilde{\mathcal{C}}$ es el abierto donde $\exp_p$ es un difeomorfismo que tiene por imagen $\mathcal{C}$, basta con demostrar que $\exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) = I^+(p, \mathcal{C})$.

En T_pM tanto $I^+(0)$ como $\tilde{\mathcal{C}}$ son abiertos y la imagen de la intersección $I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}$ también lo es al estar contenida en $\tilde{\mathcal{C}}$. Tomando q en $\exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}})$, se tiene que $\tilde{q}$ está en $I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}$ y existe la recta temporal orientada al futuro que va de 0 a $\tilde{q}$ en $\tilde{\mathcal{C}}$, implicando que $\overrightarrow{p\tilde{q}}$ es tipo tiempo orientado al futuro. Haciendo uso del lema 2.5 se tiene que $q \in I^+(p, \mathcal{C})$. Si ahora tomo q en $I^+(p, \mathcal{C})$ se tiene por el lema anterior que $\overrightarrow{p\tilde{q}}$ es temporal y orientado al futuro, al igual que la recta en el espacio tangente que va de 0 a $\tilde{q}$, haciendo que $\tilde{q}$ esté en futuro cronológico de 0. Con esto último q estará en la imagen de la intersección, dando la igualdad buscada.

Para la segunda parte del enunciado tomaré en cuenta la cerradura en $\mathcal{C}$ de la identidad mostrada arriba. Por ser la transformación $\exp_p$ un difeomorfismo local, la causalidad del espacio tangente y al tomar la cerradura en $\mathcal{C}$ la identidad se transformará en:

$$\exp_p(\overline{I^+(0)} \cap \tilde{\mathcal{C}}) = \exp_p(J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) = \overline{I^+(p, \mathcal{C})} \ .$$

Para empezar, si q está en la imagen de la intersección $J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}$, entonces $\tilde{q}$ está en $\tilde{\mathcal{C}}$ de tal suerte que el vector de 0 a $\tilde{q}$ es causal con orientación al futuro; con esto se tiene que $\overrightarrow{p\tilde{q}}$ es causal con orientación al futuro y por tanto que $q \in J^+(p, \mathcal{C})$. Si ahora tomo q en $J^+(p, \mathcal{C})$ se tiene que $\overrightarrow{p\tilde{q}}$ es causal con orientación al futuro al igual que el vector en $\tilde{\mathcal{C}}$ que va de 0 a $\tilde{q}$. Esto muestra que $\exp_p(J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) = J^+(p, \mathcal{C})$ y que éste último es la cerradura de $I^+(p, \mathcal{C})$ en $\mathcal{C}$.

□

Que $I^+(p, \mathcal{C})$ sea abierto en M conlleva una consecuencia en la causalidad global de M.

Proposición 2.7. La relación $\ll$ es abierta en cualquier variedad lorentziana M.

Que la relación $\ll$ sea abierta quiere decir en este contexto que, si $p \ll q$ en M, existirán abiertos U y V alrededor de p y q, respectivamente, tal que $p' \ll q'$ para todo p' en U y q' en V. Esto relaciona la causalidad de M con su topología de la siguiente manera.

Corolario 2.8. Para cualquier subconjunto A de una variedad lorentziana M, $I^+(A)$ es abierto.

Demostración. Para cualquier p en M, todo q en su futuro cronológico tendrá que ser un punto interior del mismo. Por la proposición anterior, siempre existe

un abierto $U \subset M$ alrededor de q tal que para todo $q' \in U$ se cumple que $p \ll q'$; dicho de otra forma, todo $q' \in U$ se encuentra en el futuro cronológico de p. Con esto queda claro que para cualquier $p \in M$, $I^+(p)$ es abierto. Para finalizar, tomando un subconjunto arbitrario A de M, se tendrá a su vez que $I^+(A)$ es abierto, dado que es la unión de los futuros cronológicos de sus elementos.

□

En general el futuro causal de cualquier subconjunto de una variedad lorentziana no será cerrado, sin embargo, el interior del futuro causal de cualquier conjunto siempre coincidirá con su futuro cronológico.

Proposición 2.9. Para cualquier subconjunto A de M siempre se da la contención $J^+(A) \subset \overline{I^+(A)}$, así como la identidad $\text{int}(J^+(A)) = I^+(A)$.

Además de la proposición 2.9, similar a la proposición 2.7, la relación de causalidad $\leq$ cumple con una buena propiedad.

Lema 2.10. La relación $\leq$ es cerrada en cualquier abierto convexo $\mathcal{C}$ de M.

Que $\leq$ sea cerrada se dice en el siguiente sentido. Si $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son sucesiones en $\mathcal{C}$ que convergen a p y q, respectivamente, también en $\mathcal{C}$, tal que para todo elemento de las sucesiones se cumple que q_n está en $J^+(p_n, \mathcal{C})$, entonces q es elemento de $J^+(p, \mathcal{C})$.

2.2. Conjuntos No Cronológicos

La cualidad de ser no cronológico en un subconjunto A de M no parecerá demasiado importante por sí sola, sin embargo es fundamental para entender las *hipersuperficies de Cauchy* que se introducirán más adelante, y que determinarán la topología de M.

Definición 2.11. Se dice que un subconjunto A de M es no cronológico si cualesquiera dos elementos de A no se pueden unir con una curva tipo tiempo.

Se pueden dar muchos ejemplos sencillos y tan triviales como se desee de esta clase de conjuntos; como un punto aislado en cualquier variedad, o cualquier recta en $\mathbb{R}^n_1$ que no sea tipo tiempo. En particular me interesaré por conjuntos de la forma $J^+(A) - I^+(A)$, sin embargo, al no ser $J^+(A)$ cerrado en general la información causal de cualquier conjunto A de M no estará completa. Esto hace necesario definir la *frontera al futuro* de cualquier conjunto A de M como $\partial I^+(A) := \overline{I^+(A)} - I^+(A)$, que resultará más útil.

Lema 2.12. Si q está en $\partial I^+(A)$, entonces $I^+(q) \subset I^+(A)$ y, a su vez, se tendrá también que $I^-(q) \subset M - \overline{I^+(A)}$.

Demostración. Sea $q \in \partial I^+(A)$. Por la proposición 2.7 se sabe que existe un abierto U alrededor de q tal que, si $p \in I^+(q)$, se cumple que $\tilde{q} \ll p$ para todo $\tilde{q} \in U$; como $q \in \overline{I^+(A)}$, existe $\tilde{q}$ en la intersección de U con $I^+(A)$ de tal forma que para algún $r \in A$ se cumple que $r \ll \tilde{q}$, mostrando que $I^+(q) \subset I^+(A)$.

Para demostrar la segunda contención del lema, voy a suponer que existe $p \in I^-(q)$ tal que también se encuentra en $\overline{I^+(A)}$. Una vez más, por la proposición 2.7, existe un abierto V alrededor de p tal que todo elemento del abierto se

encuentra en $I^-(q)$; como $p \in \overline{I^+(A)}$, existe $\tilde{p} \in V$ tal que para algún $r \in A$ se cumple que $r \ll \tilde{p}$, implicando la contradicción $r \ll q$. Por hipótesis se tiene que $q \in \partial I^+(A)$, es decir, que q se encuentra en la cerradura de $I^+(A)$, pero no en este conjunto.

□

La siguiente proposición se sigue fácilmente del pasado lema.

Proposición 2.13. La frontera $\partial I^+(A)$ es un conjunto no cronológico, para cualquier subconjunto A de M.

Demostración. Tomando $p, q \in \partial I^+(A)$ y suponiendo que $q \in I^+(p)$, el lema 2.12 me asegura que $q \in I^+(A)$. Por definición de la frontera, la intersección $\partial I^+(A) \cap I^+(A)$ es vacía, lo cual es una contradicción con lo antes supuesto.

□

La proposición 2.13 da pie a que el conjunto $\partial I^+(A)$ sea comúnmente conocido como la *frontera no cronológica al futuro* de A; además, el enunciado de esta proposición puede ser llevado un poco más lejos, pero para eso hace falta introducir el concepto de *borde* en un conjunto no cronológico.

Definición 2.14. El borde de un conjunto no cronológico B está formado por los puntos p en $\bar{B}$ tales que todo abierto U alrededor de éstos contiene una curva tipo tiempo de $I^-(p, U)$ a $I^+(p, U)$ que no pasa por B.

A lo largo del texto denotaré el borde de cualquier conjunto no cronológico B como $\mathrm{bd}(B)$.

Los bordes de cualquier conjunto no cronológico dependerán muchas veces de la dimensión del espacio ambiente o de la naturaleza del conjunto de que se trate. Son precisamente los puntos en el borde los que me permitirán dar condiciones para que un conjunto cronológico sea un objeto razonable.

Situándome en $\mathbb{R}^n_1$, los hiperplanos $t = cte.$ son conjuntos no cronológicos con borde vacío, al igual que un cono de luz $\Lambda^+(p)$, para cualquier punto p de $\mathbb{R}^n_1$. Si se toma ahora $n = 2$ y se piensa en un segmento de recta l, en el eje horizontal, por decir algo, el $\mathrm{bd}(l)$ constará de dos puntos que coincidirán con los extremos del segmento l; sin embargo, si se toma $n > 2$ se tendrá que $\mathrm{bd}(l) = l$.

Proposición 2.15. Un conjunto no cronológico B es una hipersuperficie topológica de M si no contiene puntos de su propio borde, es decir, cuando la intersección de B con $\mathrm{bd}(B)$ sea vacía.

Regresando a la discusión sobre las propiedades de la fronteras no cronológicas, se tiene la siguiente consecuencia de la proposición 2.15.

Corolario 2.16. La frontera no cronológica de cualquier subconjunto A de M es una hipersuperficie topológica, siempre que sea diferente del vacío.

Demostración. Basta que A sea diferente del vacío para que su frontera no cronológica también sea diferente del vacío. Siendo así, y considerando un punto $q \in \partial I^+(A)$, el lema 2.12 implíca que $I^+(q) \subset I^+(A)$ así como la contención $I^-(q) \subset M - \overline{I^+(A)}$; es claro que la intersección de $I^+(A)$ con $M - \overline{I^+(A)}$ es vacía y, por tanto, no pueden existir curvas en M que conecten los elementos

de un conjunto con los elementos del otro. Por lo tanto, no existirán curvas temporales que conecten puntos en $I^-(q)$ con puntos en $I^+(q)$ y esto para todo $q \in \partial I^+(A)$, asegurando que $\mathrm{bd}(\partial I^+(A))$ es vacío.

□

Esta última proposición será de gran ayuda para determinar la topología de M en términos de sus subvariedades, bajo ciertas condiciones de causalidad.

2.3. Condiciones de Causalidad

Las condiciones de causalidad fueron propuestas para pensar en universos genéricos, es decir, universos que no se salen de lo observado y pueden ser generalizados a través de una condición u obstrucción geométrica.

Definición 2.17. Se dice que una variedad M cumple con la condición cronológica si no contiene curvas cerradas tipo tiempo.

Una variedad que cumpla con la condición cronológica representa un espacio-tiempo en el cual no se observan viajes en el tiempo, en el sentido de que un observador no puede avanzar en el tiempo y regresar al punto de partida a presentarse consigo mismo antes de partir. Se puede probar que toda variedad lorentziana compacta no cumple con esta condición, como el toro lorentziano $S^1_1 \times S^1$. El cilindro $S^1_1 \times \mathbb{R}$ es otro ejemplo de una variedad que no cumple con la condición cronológica a pesar de no ser compacta.

Definición 2.18. Una variedad M cumple la condición causal si no contiene curvas cerradas causales.

La condición causal implica la condición cronológica pero no son equivalentes; considérese la variedad generada por la acción $(t, x) \mapsto (t + 1, x + 1)$ en $\mathbb{R}^2_1$.

Ambas condiciones se pueden definir para un punto de M; por ejemplo, en el caso de la condición cronológica, se dice que ésta se cumple en un punto p de M si no existen curvas cerradas tipo tiempo que pasen por p.

Definición 2.19. Se dice que M cumple con la condición fuerte de causalidad alrededor de p si para todo abierto U alrededor de p en M, existe otro abierto $V \subset U$ alrededor de p tal que toda curva causal con extremos en V está completamente contenida en U.

Esto quiere decir que toda curva causal con extremos cerca de p en M, donde se cumple la condición fuerte de causalidad, se mantendrá cerca de p, o dicho de otra forma, no viajará lejos antes de regresar cerca de p. El siguiente lema es una forma interesante de entender esta condición de causalidad.

Lema 2.20. Sea K un subconjunto compacto de M donde se cumple la condición fuerte de causalidad. Si α es una curva causal *inextensible* y orientada al futuro que empieza en K, α saldrá eventualmente de K sin regresar.

Con inextensible se quiere decir que la curva $\alpha : [0, B) \to M$ no se puede extender continuamente a la cerradura del intervalo, donde se considera que $B \leq \infty$. Geométricamente, una curva inextensible es aquélla que a lo más tiene un extremo.

Uno de los logros de la teoría causal es la construcción de una función distancia, la cual en este caso se interpreta como una *separación temporal*.

Definición 2.21. Dados dos puntos p y q en M, se define su separación temporal $\tau(p,q)$, como el supremo del conjunto de longitudes:

$$\{L(\alpha)|\alpha \text{ es una curva causal orientada al futuro de } p \text{ a } q\ \}$$

No hablaré mucho de la separación temporal en este trabajo pero sí mencionaré, aunque sea de paso, algunas de sus propiedades.

Lema 2.22. Dados un par de puntos p y q en M, la separación temporal tiene las siguientes propiedades:

1. $\tau(p,q) > 0$ si y sólo si $p \ll q$
2. Si $p \leq q \leq r$ se tiene que $\tau(p,q) + \tau(q,r) \leq \tau(p,r)$

Cabe mencionar que el conjunto de longitudes que se está usando para definir la separación temporal no siempre estará acotado. En tal caso se dice que $\tau(p,q) = \infty$, mientras que, si el conjunto de longitudes es vacío se tendrá que $\tau(p,q) = 0$.

Las condiciones para encontrar una curva que alcance la separación temporal máxima no son obvias pero existen; son tales condiciones las que me llevarán a encontrar una nueva propiedad causal que me permitirá desarrollar el lenguaje de condiciones iniciales que estoy buscando para poder siquiera hablar de la evolución de algún espacio-tiempo.

Proposición 2.23. Sean $p < q$ en M. Si $J(p,q) := J^+(p) \cap J^-(q)$ es compacto y cumple con la condición fuerte de causalidad, entonces existirá una geodésica causal de p a q con longitud $\tau(p,q)$.

La proposición 2.23 me provee la condición para poder definir uno de los conceptos más importantes de la teoría causal.

Definición 2.24. Se dice que una variedad lorentziana M es globalmente hiperbólica si cumple con la condición fuerte de causalidad y, para todo par de puntos $p < q$, $J(p,q)$ es compacto.

Puede ser que una variedad lorentziana no sea globalmente hiperbólica pero sí un subconjunto de ella, siempre y cuando los conjuntos $J(p,q)$ se encuentren contenidos en dicho subconjunto. Esta condición, donde se cumpla, implica que entre dos puntos $p < q$ siempre existirá la geodésica que los conecta y que logra la distancia, es decir, alcanza el supremo de las longitudes. Cabe mencionar que si a una variedad que sea globalmente hiperbólica se le quita un punto, algunos de los conjuntos $J(p,q)$ dejarán de ser compactos y, por lo tanto, la variedad dejará de poseer dicha propiedad.

Proposición 2.25. En una variedad globalmente hiperbólica, la relación $\leq$ es cerrada.

Esto implica que el futuro y el pasado causal de todo punto en una variedad globalmente hiperbólica es cerrado, sin embargo, aunque esto es cierto en toda región globalmente hiperbólica, si en vez de un punto se piensa en un subconjunto arbitrario, la proposición no será cierta. Por ejemplo, si A es un disco

abierto contenido en el plano $t = 0$ de $\mathbb{R}^3_1$, el futuro causal de A no será cerrado, a pesar de que el espacio de Minkowski sea globalmente hiperbólico.

Sin embargo, si se toma un subconjunto compacto la situación cambia. Considérese un punto q en la cerradura del futuro cronológico del compacto A en M; entonces, existe una sucesión $\{q_n\}$ en $I^+(A)$ que converge a q de tal forma que, para cada n, existe un punto p_n en A tal que $q_n \in J^+(p_n)$. Como A es compacto existe una subsucesión $\{p_m\}$ que converge a un punto p de A y, en consecuencia, una subsucesión $\{q_m\}$ tal que $q_m \in J^+(p_m)$. Si M es globalmente hiperbólica la proposición 2.25 implica que $q \in J^+(p)$ y por lo tanto en $J^+(A)$, mostrando que $J^+(A) \subset \overline{I^+(A)}$ y, junto con la proposición 2.9, que $J^+(A)$ es cerrado e igual a $\overline{I^+(A)}$.

2.4. Hipersuperficies de Cauchy

Se puede decir que una *hipersuperficie de Cauchy* en una variedad lorentziana modela un conjunto de condiciones iniciales, pero esto no es del todo exacto, ya que la existencia de uno de estos objetos determina por completo la topología de la variedad ambiente de tal forma que las ecuaciones de Einstein pasan a segundo plano. Esto no implica que dichas ecuaciones pierdan importancia, pero sí nos dice que la condición topológica es tan fuerte que no existe necesidad alguna de conocer, por el momento, soluciones explícitas de las ecuaciones de Einstein para formular predicciones.

Definición 2.26. Un subconjunto S de una variedad M cuya intersección con toda curva inextensible tipo tiempo del ambiente consta de un solo punto, se conoce como una hipersuperficie de Cauchy.

Aunque la definición no supone mucha estructura, el nombre delata qué clase de objeto se tiene en manos.

Lema 2.27. Una hipersuperficie de Cauchy S es una hipersuperficie topológica cerrada de M. Además, S es un conjunto no cronológico cuya intersección con toda curva causal de M es diferente del vacío.

Demostración. Basta probar que S es la frontera no cronológica de algún subconjunto de M para aplicar el corolario 2.16 y concluir que S es en verdad una hipersuperficie topológica, no cronológica, del ambiente. Claramente S no está contenida en $I^+(S)$, sin embargo sí lo estará en su cerradura; por otro lado, para todo p en $\partial I^+(S)$ se cumple que $I^-(p) \subset M - \overline{I^+(S)}$, de tal forma que, si p no es parte de S, se puede encontrar una curva temporal inextensible que no pase por S, contradiciendo la hipótesis de que S sea una hipersuperficie de Cauchy. Por lo tanto $S = \partial I^+(S)$ y, similarmente, se puede probar que $S = \partial I^-(S)$, haciendo ver que una hipersuperficie de Cauchy parte a la variedad ambiente en dos componentes conexas.

Que S se encuentre con toda curva causal del ambiente se puede consultar en [7].

□

No todos los conjuntos no cronológicos de una variedad dada se pueden ver como una hipersuperficie de Cauchy. En $\mathbb{R}^n_1$ los hiperplanos de la forma $t = cte.$ son hipersuperficies de Cauchy ya que su intersección con el futuro o pasado

cronológico de cualquier punto fuera del hiperplano será diferente del vacío, sin embargo, espacios como H^{n-1} y el cono de luz $\Lambda^+(0)$, a pesar de ser conjuntos no cronológicos, no son hipersuperficies de Cauchy de $\mathbb{R}^n_1$; basta con pensar en una curva temporal orientada al futuro contenida en el espacio de De Sitter S^{n-1}_1.

Si existieran dos hipersuperficies de Cauchy en una variedad, ¿cómo se podría ir de una a otra? Tomando en cuenta el flujo de un campo tipo tiempo que no se anula sobre M, la condición sobre el número de elementos en la intersección me proporciona una forma continua e inyectiva de ir de una hipersuperficie a otra.

Proposición 2.28. Sea S una hipersuperficie de Cauchy de M. Existe una aplicación continua $\rho : M \to S$ que es abierta.

Esta proposición me dota de la herramienta necesaria para probar la relación que existe entre las hipersuperficies de Cauchy de una misma variedad y cómo éstas determinan la topología de la variedad ambiente.

Corolario 2.29. Cualesquiera dos hipersuperficies de Cauchy de M son homeomorfas y, si S es una hipersuperficie de Cauchy de M, existe un homeomorfismo entre M y el producto $S \times \mathbb{R}$.

Para un conjunto no cronológico A en M se define el envolvente de Cauchy $D(A)$ como los puntos p en M, tales que cualquier curva causal inextensible que pase por p también pasará por A. El interior de un envolvente de Cauchy, como subconjunto de M, es una región globalmente hiperbólica, como se demuestra en [7], y provee de una demostración parcial de un resultado que ocupa un lugar importante en la teoría causal.

Teorema 2.30. Una variedad lorentziana es globalmente hiperbólica si y sólo si posee una hipersuperficie de Cauchy.

El resto de la demostración depende de la construcción de funciones continuas estrictamente crecientes sobre curvas causales orientadas al futuro, que se conocen como funciones temporales. En [3] se puede consultar la demostración de esta parte del teorema 2.30.

Si en la definición de un envolvente de Cauchy se toman sólo los puntos por los cuales pasan curvas causales inextensibles al pasado, se obtiene la envolvente de Cauchy al futuro $D^+(A)$. A partir de este conjunto se define el horizonte de Cauchy al futuro de un conjunto A no cronológico como $H^+(A) := \overline{D^+(A)} - I^-(D^+(A))$; de igual forma se define el horizonte de Cauchy al pasado, y el horizonte de Cauchy $H(A)$ se define como la unión de lo horizontes futuro y pasado.

Proposición 2.31. Una hipersuperficie topológica S de M, que además resulta ser no cronológica y compacta, es también una hipersuperficie de Cauchy de M.

El horizonte de Cauchy $H(S)$ funciona como una frontera de $D(S)$, de tal forma que, si $H(S)$ es vacío, cualquier curva causal inextensible alcanzará a S en algún punto. La proposición 2.31, cuya demostración se puede consultar en [2], resultará de mucha utilidad en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

El Teorema de Penrose

El objetivo de esta última parte de la tesina es dar una demostración genuinamente geométrica del famoso teorema de Penrose utilizando el teorema de Raychaudhuri y la teoría causal, la cual me permitirá entender las hipótesis. Sin embargo una de las hipótesis que resulta central en la exposición del teorema, ya que generaliza condiciones que aparecen muy simétricas en espacios como el de Schwarzschild, habrá de ser clarificada antes de abordar de lleno el objetivo de este capítulo.

3.1. Superficies Atrapadas

Uno de los mayores logros de Penrose en su camino al teorema que se expone en esta sección fue el condensar la noción de un campo gravitacional intenso desde el punto de vista de un observador en la dirección de un rayo de luz a travez del concepto de *superficie atrapada*. Las condiciones que determinan una superficie de este tipo son completamente geométricas y, bajo ciertas hipótesis, se pueden expresar en términos meramente causales.

Lema 3.1. Sea Σ una subvariedad tipo espacio de M de codimensión mayor o igual a 2. Si H es el campo de curvatura media de Σ, las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

1. $\langle H, u\rangle > 0$ para todo vector nulo u orientado al futuro y ortogonal a Σ
2. $\langle H, v\rangle > 0$ para todo vector causal v orientado al futuro y ortogonal a Σ
3. H es tipo tiempo y orientado al pasado

Demostración. Claramente 2 implica 1. Si se toma 1 por cierto el vector H será, a lo menos, causal, ya que si fuera tipo espacio existirían vectores tipo tiempo en $T_p^{\perp}\Sigma$ ortogonales a H y, dado que el signo del producto H estará apuntando al pasado, se obtiene que 1 es equivalente a 2. Por otro lado, 3 implica 1 y 2 ya que los vectores se encuentran en diferentes conos causales para cada $p \in \Sigma$. Por lo tanto bastará con probar que 2 es equivalente a 3.

Si 2 es cierto, el vector H debe ser tipo tiempo ya que si fuera tipo espacio o nulo existirían vectores nulos en $T_p^{\perp}\Sigma$ ortogonales a H, además, H debe estar apuntando al pasado por el signo del producto. Por lo tanto, 2 es equivalente a 3. □

El lema 3.1 me permitirá dar una buena definición del objeto que deseo usar, así como demostrar algunas de sus consecuencias.

Definición 3.2. Se dice que una subvariedad Σ tipo espacio de codimensión dos en M es una superficie atrapada si su campo de curvatura media H es temporal y se encuentra apuntando al pasado en todo punto de Σ.

Dado que la codimensión de Σ es 2, en todo punto de la superficie atrapada, existen sólo dos direcciones nulas independientes en el espacio normal $T_p^{\perp}\Sigma$, tales que todo vector normal a Σ se puede expresar, localmente, como una combinación de dos vectores nulos. Siendo así, y considerando un par de vectores nulos l^+ y l^- apuntando al futuro tales que $\langle l^+, l^-\rangle = -1$, se obtiene que $\langle H, l^+\rangle > 0$ y $\langle H, l^-\rangle > 0$.

Si ∇ es la conexión del ambiente, extendiendo l^+ y l^- sobre Σ alrededor de un punto se tiene:

$$\begin{aligned}\langle H, l^+\rangle &= \frac{1}{n}\langle \mathrm{tr} II, l^+\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle II(E_i, E_i), l^+\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle S_{l^+}(E_i), E_i\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle -\nabla_{E_i} l^+, E_i\rangle = -\frac{1}{n}\mathrm{div}_{\Sigma} l^+ \ ;\end{aligned}$$

y de manera similar se obtendrá que $\langle H, l^-\rangle = -\frac{1}{n}\mathrm{div}_{\Sigma} l^-$, donde $\{E_i\}_{i=1}^{n+2}$ es un marco ortonormal adaptado a Σ alrededor de un punto. Esto deja ver que el producto de H con los vectores nulos l^+ y l^- es un múltiplo de la divergencia de estos campos locales respecto de Σ, como se vio en la definición de la curvatura media nula en el capítulo primero de esta tesina.

Por otro lado, la segunda forma fundamental II de Σ se puede descomponer localmente como la combinación lineal:

$$II(X, Y) = \chi_-(X, Y) l^+ + \chi_+(X, Y) l^- \ ; \tag{3.1}$$

donde los coeficientes $\chi_{\pm}$ son:

$$\chi_{\pm}(X, Y) = -\langle II(X, Y), l^{\pm}\rangle.$$

Por lo tanto, los coeficientes definidos en la expresión (3.1) se pueden expresar como sigue:

$$\chi_+(X, Y) = \langle \nabla_X l^+, Y\rangle \ ; \ \chi_-(X, Y) = \langle \nabla_X l^-, Y\rangle \ .$$

A estos coeficientes se les conoce como las *segundas formas fundamentales nulas* de Σ. A partir de estas segundas formas fundamentales se introducen los *coeficientes nulos de expansión* θ_+ y θ_-, como la traza de las segundas formas fundamentales anteriormente introducidas.

$$\theta_+ := \mathrm{tr}\chi_+ = \mathrm{div}_{\Sigma} l^+ \ ; \ \theta_- := \mathrm{tr}\chi_- = \mathrm{div}_{\Sigma} l^- \ . \tag{3.2}$$

Como el campo de curvatura media de Σ es tipo tiempo y apunta al pasado, el producto con los vectores l^+ y l^- es positivo y, dada la definición de los coeficientes nulos en (3.2), se obtiene:

$$\langle H, l^+\rangle = -\frac{\theta_+}{n} \ ; \ \langle H, l^-\rangle = -\frac{\theta_-}{n} \ . \tag{3.3}$$

Por lo tanto, que Σ sea una superficie atrapada implica que $\theta_+ < 0$ y $\theta_- < 0$.

3.2. Un Teorema de Singularidad

A continuación se enuncia el resultado central de este trabajo, que Roger Penrose publicó en el año de 1965 y que resultó impresionante al ser capaz de predecir algo concreto sobre la naturaleza del universo sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones de Einstein.

Teorema de Penrose. Sea M una variedad lorentziana que satisface la condición nula de energía y que contiene una hipersuperficie de Cauchy S no compacta. Si M contiene una superficie atrapada Σ compacta, entonces existirán geodésicas nulas de M que no serán completas al futuro.

La causalidad de Σ asegura que es también un conjunto no cronológico de M y, por el corolario 2.16, la frontera no cronológica $\partial I^+(\Sigma)$ será una hipersuperficie topológica de M. Dado que Σ es compacta, cabe preguntarse si su frontera no cronológica también lo será; suponiendo que así sea la proposición 2.31 implica que dicha frontera es, además, una hipersuperficie de Cauchy. Esto último provoca una contradicción, ya que todas las hipersuperficies de Cauchy de M son homeomorfas entre sí y por hipótesis la variedad contiene una que no es compacta.

La proposición 2.25 junto con la compacidad de Σ implican que $J^+(\Sigma) = \overline{I^+(\Sigma)}$, así que en este caso $\partial I^+(\Sigma) = J^+(\Sigma) - I^+(\Sigma)$ y cualquier punto de la frontera no cronológica que no esté en Σ está conectado con ésta última por medio de una geodésica nula, ya que $\partial I^+(\Sigma)$ es un conjunto no cronológico y como consecuencia del teorema A.3. Aún más, las geodésicas nulas que conectan a los puntos en Σ con los puntos en la frontera son ortogonales a ésta y no poseen puntos *focales* antes del punto en la frontera, asegurando que alrededor de cualquier punto en Σ existe una congruencia geodésica nula normal a la superficie atrapada sobre $\partial I^+(\Sigma)$ tal que sus curvas no se juntan siquiera a primer orden.

Como la frontera es cerrada y no compacta existirá una sucesión $\{q_j\}$ en $\partial I^+(\Sigma)$ que no posea ninguna subsucesión convergente, de tal forma que para cada q_j existe una geodésica nula η_j que conecta a dicho punto con Σ ortogonalmente. Una sucesión en la frontera podría tener puntos en Σ e incluso una cantidad numerable pero, por la compacidad de Σ, la sucesión $\{q_j\}$ a lo más compartirá un número finito de elementos con Σ, los cuales se pueden remover de la sucesión sin mayor problema. Sin embargo, la sucesión $\{q_j\}$ sí induce una sucesión $\{p_j\}$ en Σ: las intersecciones de las geodésicas con la superficie atrapada, que contendrá una subsucesión convergente $\{p_k\}$.

Si se nombra p al punto de convergencia de $\{p_k\}$, todo lo anterior nos da una sucesión de geodésicas $\{\eta_k\}$ en $\partial I^+(\Sigma)$ que, de converger, tendrá que ser a una curva que empiece en p, pero esto último hace falta demostrarlo a pesar del obstáculo que presenta una métrica de Lorentz, ya que ésta no induce una métrica analítica sobre la variedad. Dicha dificultad se podrá sortear, aunque se obtendrá un criterio débil de convergencia.

Definición 3.3. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales orientadas al futuro y $\mathcal{R}$ una cubierta de abiertos convexos de M. Una sucesión límite de $\{\alpha_n\}$ respecto de $\mathcal{R}$ es un subconjunto de M, a lo más numerable, cuyos elementos se encuentran relacionados causalmente como $p_i < p_{i+1}$, y cumplen con lo siguiente:

Para cada p_i existe una subsucesión $\{\alpha_m\}$ y, para cada m, un conjunto creciente y finito de números s_{m_k} tal que:

1. $\lim_{m\to\infty} \alpha_m(s_{m_j}) = p_j$ para cada $j \leq i$
2. Para cada $j < i$, los puntos p_j y p_{j+1}, y las curvas $\alpha_m|[s_{m_j}, s_{m_{j+1}}]$ que los unen se encuentran contenidos en un solo $\mathcal{C}_j$ de la cubierta $\mathcal{R}$, para toda m
3. Si el conjunto $\{p_i\}$ es numerable, como sucesión no es convergente. En caso de ser finito consta de más de un punto y no existirá un conjunto con más puntos tal que cumpla con las propiedades 1 y 2

La propiedad número 2 de la definición 3.3 me permite conectar dos puntos consecutivos de la sucesión límite con geodésicas, generando así una curva causal con segmentos geodésicos. Sin embargo, esta curva no es un límite en el sentido analítico de convergencia. Es por esta razón que se designa a la curva que une con geodésicas los puntos de la sucesión límite por *cuasi-límite* de la sucesión de curvas $\{\alpha_n\}$.

Resulta que se puede asegurar la existencia de una sucesión límite, y por lo tanto de un cuasi-límite, con un par de condiciones bastante sencillas. La demostración de la proposición 3.4 se puede consultar en [7, p. 405].

Proposición 3.4. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales orientadas al futuro en M tales que $\{\alpha_n(0)\}$ converge a p y existe un abierto alrededor de p que contiene sólo un número finito de curvas α_n; es decir, una infinidad de curvas en la sucesión salen de dicho abierto. Entonces, respecto de cualquier cubierta $\mathcal{R}$ de convexos abiertos de M, $\{\alpha_n\}$ tiene una sucesión límite que empieza en p.

Aplicando la proposición 3.4 a la sucesión de geodésicas nulas $\{\eta_k\}$, que claramente cumple con las condiciones si se da un parámetro afín a todas ellas tal que $\eta_k(0)$ está en Σ, se obtiene una sucesión límite para $\{\eta_k\}$ que empieza en el punto p de Σ al cual converge la sucesión $\{p_k\}$ y estará contenida, por la propiedad 1 de la definición 3.3, en la frontera $\partial I^+(\Sigma)$, ya que las geodésicas η_k se encuentran contenidas en dicha frontera.

Para el primer punto p_1 de la sucesión límite se obtendrá, en principio, una geodésica causal orientada al futuro de p a p_1. Como $\partial I^+(\Sigma)$ es un conjunto no cronológico la geodésica que una a p con p_1 debe ser nula. De igual forma, la geodésica causal de p_1 a p_2 será causal en primera instancia, haciendo que la curva de p a p_2 sea causal. Si ésta última curva falla en ser a lo menos una pregeodésica nula, por la proposición A.4 existirá una curva temporal de p a p_2, contradiciendo el hecho de que $\partial I^+(\Sigma)$ es un conjunto no cronológico. Por lo tanto, y siguiendo el argumento inductivamente, se tiene que p está conectado por una geodésica nula con todo p_i de la sucesión límite.

Finalmente, la sucesión $\{q_k\}$ en $\partial I^+(\Sigma)$ diverge y la sucesión límite constará de una cantidad numerable de elementos que, por la propiedad 3 de la definición 3.3, también tendrá que divergir. Así que, en el sentido de cuasi-límite que se ha construido, la sucesión $\{\eta_k\}$ converge, o al menos me permite construir una geodésica nula e inextensible η ortogonal a Σ.

Si bien estoy restringiendo toda mi atención a la frontera no cronológica $\partial I^+(\Sigma)$, la curva η es una geodésica de M y, como se podrá anticipar, el objetivo es construir una hipersuperficie nula alrededor de ella que además esté contenida

en $\partial I^+(\Sigma)$ para así poder aplicar el teorema de Raychaudhuri que se demostró al inicio de esta tesina. Siendo así, de aquí en adelante supondré que η es una geodésica nula completa hacia el futuro.

Al ser $\partial I^+(\Sigma)$ un conjunto no cronológico no puede existir otra geodésica nula que empiece en Σ y que toque a η; de darse tal intersección, digamos en un punto r, existiría un punto sobre η delante de r que estaría conectado por una curva temporal con Σ por la proposición A.4. Esto hace imposible, además, que existan dos direcciones nulas independientes en un punto sobre η y por otro lado que, de construir una hipersuperficie nula que contenga a η, la congruencia dada por el campo característico esté bien definida. La condición de la frontera de ser un conjunto no cronológico me asegura también que no existirán puntos *focales* de Σ sobre η como resultado del teorema A.3; de existir puntos *focales* de Σ sobre η la aplicación exponencial exp: $N\Sigma \to M$ sería singular en el punto asociado al punto focal.

Viendo que no se cumple ninguno de los malos augurios propuestos en el párrafo anterior se puede considerar, ahora sí, una hipersuperficie nula N contenida en la frontera $\partial I^+(\Sigma)$ alrededor de η. Como se está suponiendo que η sea completa, los generadores nulos de N también lo serán, aunque la hipersuperficie resulte ser muy pequeña. Entonces, tomando en cuenta el teorema Raychaudhuri, dado que los generadores nulos de N son completos hacia el futuro se tiene que la curvatura media nula θ de N deberá ser no negativa.

Si recordamos la definición de la curvatura media nula (1.1) y tomando en cuenta que el campo característico de N se puede escalar de tal forma que en Σ es l^+ o l^-, la hipótesis de que Σ sea una superficie atrapada implica que $\theta > 0$, para todo p en la intersección de Σ con N, en contradicción con lo antes dicho.

La contradicción que se mostró por suponer que la geodésica η es completa demuestra el Teorema de Penrose, y hace ver lo decisivo que fue en este trayecto el concepto de superficie atrapada. Este teorema se ha usado para justificar, teóricamente hablando, la existencia de agujeros negros en el universo ya que no todos los rayos de luz viajarán indefinidamente por el universo, al menos no los rayos que viajen cerca de una superficie atrapada.

Apéndice A

Cálculo de Variaciones

Este apéndice sirve para justificar muchos de las afirmaciones que aparecen en los capítulos 2 y 3 de esta tesina. Además se definirá, para aliviar un hueco en la demostración del teorema de Penrose, lo que es un *punto focal* de una subvariedad. Los resultados y conceptos que se expondrán aquí se pueden consultar en [7, cap. 10] para una mayor comprensión, así como para verificar las demostraciones pertinentes.

El concepto de punto focal es una generalización del concepto de punto conjugado que aparece en el contexto de campos de Jacobi, al realizar variaciones geodésicas. La generalización consiste en debilitar la condición de que las geodésicas de la variación partan de un mismo punto y cambiar dicha condición por una que sea C^∞.

Definición A.1. Sea γ una geodésica de M tal que para algún parámetro afín $\gamma(0)$ está en P, subvariedad de M, y $\gamma'(0)$ es ortogonal a P. Se dice que $\gamma(r)$, con $r \neq 0$, es un punto focal de P a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi J de P sobre γ diferente de cero tal que $J(r) = 0$.

Como ahora las geodésicas varían sobre una subvariedad P de M, es normal pedir que un campo de Jacobi J de P sobre una geodésica γ sea uno tal que $J(0)$ sea tangente a P y la parte tangente de $J'(0)$ sea igual a $S_{\gamma'(0)}(J(0))$. La siguiente proposición tiene el sentido de aclarar la definición de punto focal.

Proposición A.2. Sea $\gamma : [0, b] \to M$ una geodésica normal a P. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\gamma(b)$ es un punto focal de P a lo largo de γ
2. Existe una variación por geodésicas normales a P no trivial $\mathbf{x}$ de γ tal que $\mathbf{x}_v(b, 0) = 0$
3. La transformación exponencial exp: $NP \to M$, que se encuentra restringida al haz normal, es singular en $b\gamma'(0)$

Una buena parte de la teoría causal pasa por saber cuándo dos puntos de un mismo conjunto se pueden unir por una curva temporal, pregunta que el cálculo de variaciones puede resolver satisfactoriamente. El teorema A.3 engloba una serie de enunciados independientes que permiten saber bajo qué condiciones dos puntos relacionados causalmente pueden estarlo temporalmente.

Teorema A.3. Sea P una subvariedad tipo espacio de M. Si α es una curva causal de P a un punto q, existe una curva tipo tiempo de P a q tan *cercana* a α como se desee, a no ser que α sea una geodésica nula normal a P, sin puntos focales de P anteriores a q.

A pesar de que el teorema A.3 engloba toda la información que podríamos desear sobre la relación causal entre dos puntos, la proposición A.4 resulta ser más útil en ciertas ocasiones.

Proposición A.4. Si una curva causal α de p a q en una variedad lorentziana M no es una pregeodésica nula, entonces existe una curva tipo tiempo de p a q en M tan cerca de α como se desee.

Como se puede ver, el enunciado de la proposición A.4 es más sencillo característica que precisamente puede hacerla más útil.

Bibliografía

[1] Gregory J. Galloway. Null geometry and the Einstein equations. In *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, pages 379–400. Birkhäuser, Basel, 2004.

[2] Gregory J. Galloway. Notes on Lorentzian causality. ESI summer school in Mathematical Relativity. http://www.math.miami.edu/ galloway, 2014.

[3] Robert Geroch. Domain of dependence. *J. Mathematical Phys.*, 11:437–449, 1970.

[4] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London-New York, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.

[5] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.

[6] José Eduardo Núñez Ortiz. Superficies en el espacio de Minkowski con vector de curvatura media afín. Tesis de Licenciatura, 2015. Universidad Nacional Autónoma de México.

[7] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[8] Hans Ringström. *The Cauchy problem in general relativity*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.

[9] José M. M. Senovilla and David Garfinkle. The 1965 Penrose singularity theorem. *Classical Quantum Gravity*, 32(12):124008, 45, 2015.